

# 教育部教學實踐研究計畫成果報告

計畫編號：PMS1100193

學門專案分類：數理學門

執行期間：2021.08.01 – 2022.07.31

## 動態幾何軟體融入微積分教學 (微積分(一)課程)

計畫主持人：張其棟

執行機構及系所：逢甲大學應用數學系

成果報告公開日期：立即公開 延後公開

繳交報告日期：2022.09.20

## (動態幾何軟體融入微積分教學)

### 一. 本文

#### 1. 研究動機與目的

微積分課程在大學教育承擔傳遞數學知識，以及訓練學生計算技巧的重要任務，是各專業領域的發展基礎。不過由於微積分的內容豐富多元，更涉及抽象的概念，在課堂時間與教學資源有限的前提之下，教師有時無法針對特定概念深入解說，造成學生不易在課堂上同步理解，導致學習成效不佳的情況。為解決學生不易理解抽象概念的困境，已經有許多教材透過靜態的圖像將抽象概念轉換為視覺呈現，降低了理解的門檻，但是仍有部分學生無法從中獲益，因此本計畫導入動態幾何軟體(Dynamic Geometry Software, DGS) GeoGebra 搭配學習單輔助微積分教學，讓學生經由課堂上的教師示範與課後的動手操作，得以觀察動態幾何的系列變化，增進對應知識的理解；不僅於此，本計畫也透過 Kolb 學習風格的分類，探究不同類型學生在此教學法的學習成效，以作為課程改善的重要依據。

根據上述說明，本計畫的研究主題為導入 GeoGebra 搭配學習單輔助微積分教學，並探討不同學習風格學生的學習成效，在此分述如下：

- I. 應用 GeoGebra 搭配學習單進行微積分(一)課程的教學，並提供學生動手操作機會，以增進學生的學習動機與學習成效。
- II. 瞭解不同學習風格學生在此教學法之下的學習表現。

#### 2. 文獻探討

##### (1) 動態幾何軟體 GeoGebra

動態幾何軟體是讓使用者能夠設計並操作幾何物件的軟體，包括 GeoGebra(<https://www.geogebra.org/>)與動態幾何繪圖板(Geometer's Sketchpad, GSP)等常見軟體，左台益(2012)指出在動態幾何環境下所操作的物件，可以保持數學結構的動態影像，這包含了圖形概念(figural concept)(Fischbein, 1993)與電腦所認知的圖形(computer-recognized figure)(Talmon, V., & Yerushalmy, M., 2004)，使螢幕呈現出虛擬的圖像元件、數學的幾何圖形，以及電腦動畫等三個動態表徵，讓使用者得以透過操作的歷程，觀察並體會當中所蘊含的數學思維，因此能有效運用於數學課程。其中 GeoGebra 是近年新興的動態幾何軟體，亦為免費的授權軟體，因此廣泛應用在數學課程輔助教學。基於上述理由，本計畫亦選取 GeoGebra 作為輔助微積分教學的動態幾何軟體，使學生能夠動手操作並觀察體會重要概念，以增進微積分的學習效益。

##### (2) Kolb 學習風格

為瞭解不同學習者的學習方式與策略，Kolb(1984)基於經驗學習理論提出四種不同的學習風格(圖 1)，主要是透過資訊的理解與處理兩個構面進行區分。圖 1 中縱軸是資訊理解的構面，由上至下分別是具體經驗(concrete experience)到抽象概念(abstract

conceptualization)，其中具體經驗代表學習者習慣以個人的感受獲得實際經驗，抽象概念則是指學習者喜好透過有系統的邏輯思考進行學習；橫軸則是資訊處理的構面，由左至右是主動實驗(active experimentation)到省思觀察(reflective observation)，其中主動實驗代表學習者偏好透過實作進行學習，而省思觀察則代表學習者善於從不同觀點進行分析判斷。這兩個構面區分出四種學習風格，分別是適應型(Accommodator)、聚合型(Converger)、同化型(Assimilator)和分散型(Diverger)，其中適應型的學習者偏好動手做勇於嘗試，透過直覺獲得具體的實際經驗，聚合型的學習者善於解決問題，結合測試與演繹進行決策獲得解答，同化型的學習者偏好觀察搭配思考，以進行系統性的歸納推理，分散型的學習者則富有想像力，透過觀察找出通則輔助學習。本研究將應用上述四種學習風格，針對修課學生進行分類，以瞭解不同學習風格學生的學習成效。

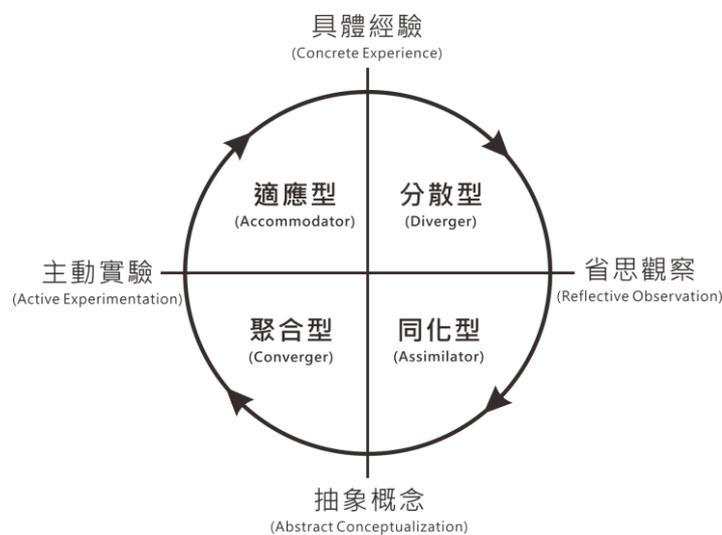


圖 1 Kolb 學習風格類型

### 3. 研究問題

為探討於微積分(一)課程使用學習單輔助 GeoGebra 進行教學所帶來的效益，以及不同學習風格學生的學習表現，本研究的研究問題臚列如下：

- I. 使用學習單輔助 GeoGebra 進行教學，是否能增進學生的學習成效？
- II. 使用學習單輔助 GeoGebra 進行教學時，不同學習風格學生的學習成效是否會產生差異？

### 4. 研究設計與方法

欲回答上述研究問題，本研究採準實驗研究法，研究設計如圖 2。自變項為教學法與學生的學習風格，其中實驗組是教師先於課堂運用 GeoGebra 示範教學，再由學生課後搭配學習單操作 GeoGebra，完成學習單的填寫隨作業一併繳交，對照組則僅由教師在課堂運用 GeoGebra 示範教學，學生課後可自行操作 GeoGebra，但沒有提供學習單進行輔助；學習風格變項則是透過 Kolb 學習風格量表，將學生依結果分為適應型、聚合型、同化型與分散型。進行教學實驗前先蒐集學生 110 學年度學測數學科成績當作前測

分數視為共變數，教學實驗後則計算期中與期末考試題中與 GeoGebra 操作單元相關的總得分作為後測分數。課程結束前再實施問卷調查蒐集學生回饋資料，包含李克特量表 (Likert scale) 的量化資料與開放性問題的質性資料。

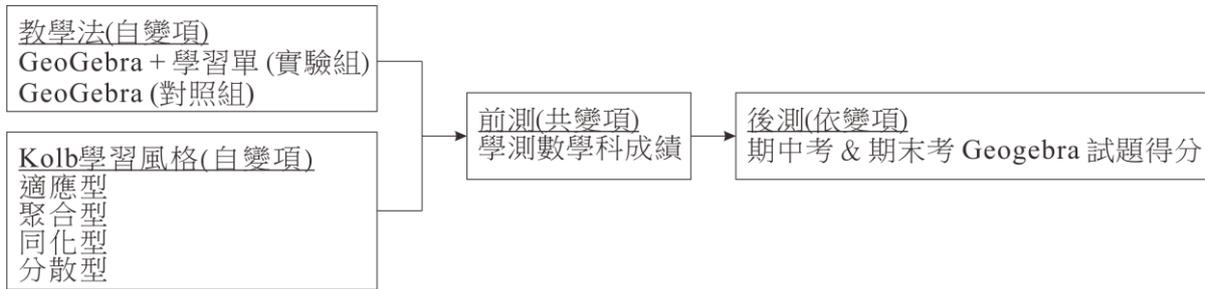


圖 2 研究設計圖

資料處理主要是利用變異數分析(ANOVA)，探討以學測數學科成績為前測視為共變數的前提下，教學法與學習風格對期中與期末考 GeoGebra 試題得分的影響。本研究亦將問卷調查中的李克特量表藉由分數進行轉換，並將開放性問題的質性回饋資料進行歸類，以瞭解實驗組學生的態度展現。

## 5. 教學暨研究成果

### (1) 教學過程與成果

本研究的研究對象為某私立大學資電或理工學院提供 110 學年度學測數學科成績，並修習微積分(一)課程完整參與期中考和期末考的大一學生，實驗組包含三個班級共 137 位學生，對照組則為一個班級共 52 位學生。

教師在教學實驗前先選取適切單元，依據多媒體設計原則(Mayer, 2001)編寫 GeoGebra 程式。以「定積分」單元為例，圖 3 為對應的操作介面，畫面被分割為四個區塊，A 區展示本單元的重要概念，使學生操作時可以適時進行對照，B 區則利用按鈕讓學生得以選擇不同的函數條件，C 區是透過選取、拖曳和點選的方式，提供學生自由設定細節的機會，也同步呈現即時的數據變化，左側 D 區則藉由動態幾何的展示，即時給予視覺上的系列變化，將抽象概念具體化以提升學生的學習成效。

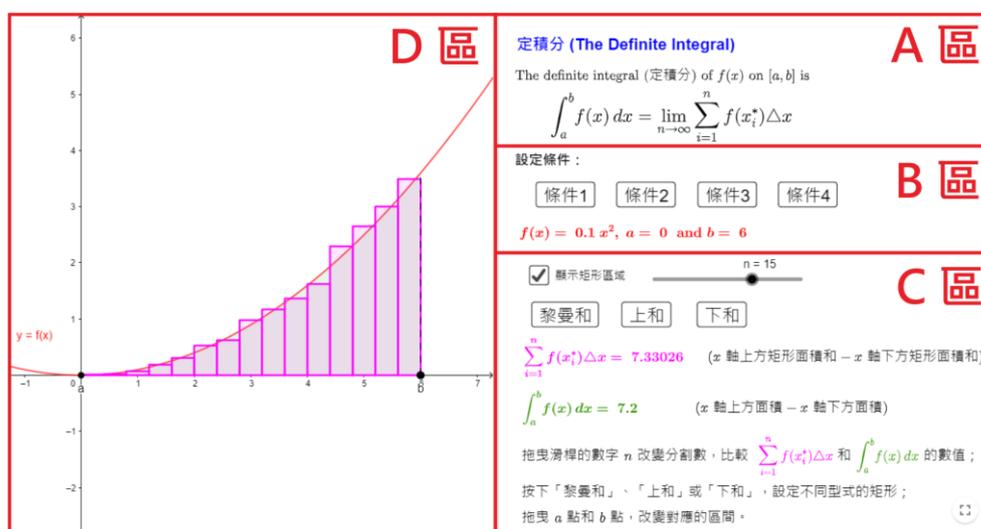


圖 3 「定積分」單元的 GeoGebra 網頁操作介面

透過上述編寫 GeoGebra 的歷程，本研究共完成「極限」、「導數及其應用」和「積分及其應用」三個主題共八個單元的 GeoGebra 教材(表 1)，並透過教師教學網站『微積分總棟員』當中的頁面「玩玩微積分 GeoGebra」進行整合 (<https://sites.google.com/site/calculusteaching/home/calculus/GGB>)，藉由系統化的選單頁面提供連結管道，增進學生運用本教材的便利性。

表 1 微積分(一)課程的 GeoGebra 教材列表

主題	單元	網址
極限	函數的極限(The Limit of a Function)	<a href="https://www.geogebra.org/m/jrffzjc6">https://www.geogebra.org/m/jrffzjc6</a>
	夾擠定理(The Squeeze Theorem)	<a href="https://www.geogebra.org/m/a2gwtxfb">https://www.geogebra.org/m/a2gwtxfb</a>
導數及其應用	切線(The Tangent Line)	<a href="https://www.geogebra.org/m/dzwcwabh8">https://www.geogebra.org/m/dzwcwabh8</a>
	法線(The Normal Line)	<a href="https://www.geogebra.org/m/gyuvu5cf">https://www.geogebra.org/m/gyuvu5cf</a>
	線性估計(Linear Approximations)	<a href="https://www.geogebra.org/m/szbzj7rp">https://www.geogebra.org/m/szbzj7rp</a>
積分及其應用	微分量(Differentials)	<a href="https://www.geogebra.org/m/qsc2dyq9">https://www.geogebra.org/m/qsc2dyq9</a>
	定積分(The Definite Integral)	<a href="https://www.geogebra.org/m/p9kysqfp">https://www.geogebra.org/m/p9kysqfp</a>
	曲線所圍區域的面積(The Area between Curves)	<a href="https://www.geogebra.org/m/ge4pg4hh">https://www.geogebra.org/m/ge4pg4hh</a>

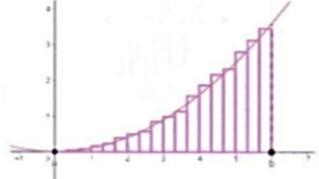
為瞭解學習單輔助學生操作 GeoGebra 的成效，本研究設計對應的學習單供實驗組學生使用。圖 5 為學生於「定積分」單元繳交的 GeoGebra 學習單，學習單設計原理呼應 GeoGebra 單元教材，上方提供快速連結方便學生直接點選使用，接續是展示定義或定理以強調單元重點，然後分別設定不同條件情境，利用截圖與系統化的表格引導學生操作 GeoGebra 以填入對應的數據，藉此帶領學生觀察 GeoGebra 所呈現一系列的動態幾何變化，達到認識本單元重要概念的預期目標。

Part D. 積分 (The Integral) & Part E. 積分的應用 (Applications of the Integral)

定積分 (The Definite Integral) <https://www.geogebra.org/m/p9kvsqfp>

**Theorem** The definite integral (定積分) of  $f$  from  $a$  to  $b$  is  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$ .

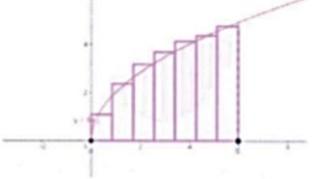
設定條件 1:  $f(x) = 0.1x^2$  and  $[a, b] = [0, 6]$ .



$n$	5	10	15	20
黎曼和	6.99947	7.1453	6.91914	7.14061
上和	9.504	8.316	7.936	7.749
下和	5.184	6.156	6.496	6.669

Solution: area =  $\int_0^6 0.1x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x = 7.2$

設定條件 3:  $f(x) = 2\sqrt{x}$  and  $[a, b] = [0, 6]$ .



$n$	5	10	15	20
黎曼和	18.80355	17.7294	17.71211	17.55397
上和	22.03772	20.88462	20.47597	20.26551
下和	16.15895	17.94224	18.51638	18.79581

Solution: area =  $\int_0^6 2\sqrt{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x = 19.59592$

圖 4 學生於「定積分」單元繳交的 GeoGebra 學習單

本研究的教學實驗期程共分三個階段：實施教學實驗前，教師先利用 Kolb 風格量表分析學生的學習風格，並蒐集學測數學科成績。進行教學實驗時，教師於實驗組與對照組皆先利用課程講義講解重要概念，並在課堂操作 GeoGebra 進行教學示範，不過於實驗組則更進一步提供對應的學習單，要求學生課後依照學習單的引導自行操作 GeoGebra，完成表格填寫隨作業一併繳交。教學實驗後，則運用期中與期末考試成績，以及問卷調查蒐集學生回饋的量化與質性資料。

(2) 學生學習回饋

本研究先依學生的學習風格類型、學測數學科成績，以及期中與期末考中與 GeoGebra 試題相關的得分進行統計分析，表 2 為對應的結果。當中不論是實驗組或對照組都以聚合型和同化型的學生人數較多，反應本研究的研究對象為資電或理工學院的學生，普遍習慣運用抽象思考的屬性。

表 2 不同學習風格之學生學習表現統計結果

組別	學習風格	人數	學測數學科成績		期中考與期末考 GeoGebra 得分	
			平均級分	標準差	平均得分	標準差
實驗組	適應型	12	8.25	1.82	29.92	4.70
	聚合型	43	8.28	2.05	27.72	7.08
	同化型	69	8.29	1.90	26.32	7.58
	分散型	13	7.31	1.80	24.46	9.13
對照組	適應型	9	8.56	1.59	24.89	5.99
	聚合型	15	8.20	1.74	29.27	4.83
	同化型	24	8.17	1.79	25.04	7.77
	分散型	4	6.75	1.50	26.75	4.99

為瞭解教學法與學生學習風格這兩個自變項對學生學習表現的影響，本研究採用變異數分析(表 3)，結果顯示學測數學科成績對於 GeoGebra 得分的變異有顯著意義( $F = 6.174, p < .005$ )，不過以學測數學科成績為共變項的前提之下，不論是教學法或學習風格對於 GeoGebra 得分都不會產生顯著差異。

表 3 變異數分析結果

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F 值	p 值
教學法	16.047	1	16.047	0.320	0.572
學習風格	236.358	3	78.786	1.573	0.198
學測數學科成績	309.206	1	309.206	6.174	0.014
交互作用	392.976	7	56.139	1.121	0.352
誤差	8814.725	176	50.084	-	-

本研究更進一步探討實驗組內不同學習風格學生對學習成效的影響，變異數分析結果為表 4，說明以學測數學科成績為共變項的前提之下，學習風格對於 GeoGebra 得分並不會造成顯著差異。

表 4 實驗組內學習風格之變異數分析結果(n=137)

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F 值	p 值
學習風格	238.785	3	79.595	1.556	.203
學測數學科成績	328.919	1	328.919	6.431	.012
交互作用	329.461	3	109.820	2.147	.097
誤差	6597.404	129	51.143		

最後則是分別探究各個學習風格類型的學生，在不同教學法之下對學習成效的影響。表 5、表 6、表 7 和表 8 分別為適應型、聚合型、同化型和分散型等學習風格所對應的變異數分析結果，結果顯示以學測數學科成績為共變項的前提之下，僅有對於適應型的學生類型，不同教學法會對 GeoGebra 得分的差異達到顯著意義( $F = 4.577, p < .05$ )，而在其他三個類型的學生則沒有產生顯著影響。

表 5 「適應型」學生類型中教學組別之變異數分析結果(n=21)

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F 值	p 值
教學法	130.004	1	130.004	4.577	.047
學測數學科成績	22.702	1	22.702	0.799	.384
交互作用	24.227	1	24.227	0.853	.369
誤差	482.876	17	28.404		

表 6 「聚合型」學生類型中教學組別之變異數分析結果(n=58)

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F 值	p 值
教學法	26.571	1	26.571	0.591	.445
學測數學科成績	3.986	1	3.986	0.089	.767
交互作用	0.180	1	0.180	0.004	.949
誤差	2427.419	54	44.952		

表 7 「同化型」學生類型中教學組別之變異數分析結果(n=93)

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F 值	p 值
教學法	29.045	1	29.045	0.515	.475
學測數學科成績	251.944	1	251.944	4.468	.037
交互作用	23.223	1	23.223	0.412	.523
誤差	5018.776	89	56.391		

表 8 「分散型」學生類型中教學組別之變異數分析結果(n=17)

變異來源	平方和	自由度	平均平方和	F 值	p 值
教學法	16.019	1	16.019	0.318	.582
學測數學科成績	260.550	1	260.550	5.174	.041
交互作用	160.742	1	160.742	3.192	.097
誤差	654.688	13	50.361		

至於問卷調查中的李克特量表，則是依四個向度將選項非常同意、同意、中立、不同意和非常不同意分別轉換為 5 分、4 分、3 分、2 分和 1 分進行統計，結果如表 9，四個向度的內部一致性 Cronbach's  $\alpha$  係數依序為 .903、.905、.899 和 .840。向度一主要是瞭解教師在課堂上操作 GeoGebra 進行教學示範的成效，向度二為學生自行操作 GeoGebra 所帶來的效益，向度三是 GeoGebra 操作介面(圖 3)為學生所帶來的影響，向度四則是學生使用學習單的成效。可以發現不論是教師在課堂上操作 GeoGebra 的教學示範，或是學生自行操作 GeoGebra 的體驗，以及學習單的輔助都能增進學生的概念理解，也能提升學生學習的意願，而向度三的統計結果則顯示運用多媒體設計原則編寫 GeoGebra 教材，能有效增進學生操作 GeoGebra 的效益。

表 9 問卷調查中李克特量表之分析結果

向度 (填答人數)	問題	選項					平均分數
		非常同意	同意	中立	不同意	非常不同意	
向度一： 課堂示範 (124 人)	老師在課堂上操作 GeoGebra 進行示範教學，能提升我學習對應單元的意願。	46	61	15	1	1	4.21
	老師在課堂上操作 GeoGebra 進行示範教學，能讓我立即理解對應的概念。	55	59	9	0	1	4.35
	我希望課堂上有更多單元能搭配 GeoGebra 的操作進行示範教學。	49	46	27	0	2	4.13
向度二： 動手操作 (122 人)	透過親自操作 GeoGebra，能讓我更理解對應的概念。	48	65	9	0	0	4.32
	透過親自操作 GeoGebra，能提升我學習對應單元的意願。	41	56	23	1	1	4.11
	我希望有更多單元能讓我進行 GeoGebra 的操作。	40	49	31	1	1	4.03
向度三： 介面設計 (121 人)	GeoGebra 介面 A 區的重點整理，能讓我快速瞭解對應的主題。	56	60	4	1	0	4.41
	透過選取 GeoGebra 介面 B 區的設定條件，能讓我從不同情境認識本單元的概念。	54	57	10	0	0	4.36
	透過即時觀察 GeoGebra 介面 C 區的數據變化，能讓我更加理解本單元的概念。	52	60	8	1	0	4.35
	透過即時觀察 GeoGebra 介面 D 區的圖像變化，能讓我更加理解本單元的概念。	63	51	7	0	0	4.46

向度四： 學習單使用 (101 人)	藉由 GeoGebra 學習單的引導，能讓我快速熟悉 GeoGebra 的操作方式。	46	51	4	0	0	4.42
	GeoGebra 學習單能提升我操作 GeoGebra 的意願。	37	56	7	1	0	4.28
	我希望更多的單元能提供 GeoGebra 學習單輔助學習。	37	48	15	1	0	4.20

最後將問卷調查中放開性問題所蒐集的質性資料同樣依上述四個向度進行歸類，結果如表 10。透過學生的回饋資料，可以發現不論是教師在課堂進行示範或是學生在課後自行操作 GeoGebra，都能有效增進學生對概念的理解，而依據多媒體設計原則所設計的操作介面與學習單的使用，則能引導學生快速熟悉 GeoGebra 的操作方式，並進行有系統的觀察，更一步提升學生操作 GeoGebra 的效益；另一方面，有學生點出由於已於高中學過本學期所教的部分概念，所以對於 GeoGebra 輔助教學的感受沒有特別深刻，也許在下學期的課程能有更深入的體驗，也有學生針對 GeoGebra 的操作介面提出建議，可作為後續進行改善的具體方向。

表 10 學生回饋資料列舉

向度	學生回饋
向度一： 課堂示範	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 對理解概念幫助很大，有圖形確實可以幫助理解。</li> <li>2. 一些微小的變化可以清晰看到。</li> <li>3. 有點多餘，在課堂上放兩張圖其實就能解釋一整個過程。</li> <li>4. 能更快速理解單元概念，也透過數字的變化來理解之間的關係。</li> <li>5. 圖像化可以幫助理解，但這學期的觀念以前就會了，相信下學期會更有感。</li> <li>6. 雖然 GeoGebra 使用方便，但我仍較喜歡手繪。</li> </ol>
向度二： 動手操作	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 透過操作圖形，可以輔助學習，讓學習變得有趣，也能加深對圖形理解的印象。</li> <li>2. 相當完善，可是在最後幾次的定積分的 GeoGebra 有點怪怪，每次按條件 1 的時候，上下和以及黎曼和的數值都不同。</li> <li>3. 非常方便，連小數值都算得出來。</li> <li>4. 很方便，可以直接透過 GeoGebra，了解上課時所學到的公式所對應的圖形，而也可以藉此來檢查自己的計算及作圖有沒有錯，但美中不足的部分是在移動圖上的點時，有時數字太小就很難移動到想要的位置(小數點比較多的值)。</li> <li>5. 老師很用心，不過可能因為是作業，所以就想快快的拉到答案，如果是當作解題工具的話會很願意使用，像是 Desmos 可看出函數圖形。</li> <li>6. 很容易操作，讓觀念圖像化，能夠快理解每個單元的概念，學微積分的過程多一點樂趣。</li> </ol>
向度三： 介面設計	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 左邊的動態圖形能讓我清楚看到不同設定下的變化，很有趣也對學習很有幫助。</li> <li>2. D 區數值只能滑鼠拉選使用，希望能增加用打字的更改數值。</li> <li>3. 用手機操作 GeoGebra 的話畫面太小，所以我通常都用電腦操作，可是有時候在拉點的時候，會不小心拉出去到別的地方，第一次使用雖然不太熟悉，但很快就能上手，是個好工具！</li> <li>4. 方便理解，透過好玩的程式，增加操作的興趣，希望操作的數據可供複製貼上，不然寫學習單的時候，偶爾會眼殘，辛苦老師給的設計。</li> <li>5. 顏色配置鮮明，一見了然。</li> <li>6. 第一次遇到原來 GeoGebra 可以做的像 ABCD 區的樣子，之前用只是快速看方程式的圖案和多個方程式的交點，希望以後多個單元也可以使用。</li> </ol>
向度四： 學習單使用	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 一開始看不懂先照著學習單做，可以很快理解現在在做什麼。</li> <li>2. 讓我能更深入的了解該單元，並很快熟悉操作方式。</li> <li>3. 題目不算多，也蠻簡單的，可以在短時間內完成，可以繼續進行。</li> <li>4. 促使自己使用，雖然要更主動一些，但真的是一份動力。</li> <li>5. 雖然操作 GeoGebra 是為了學習單，但做完後能確實讓我更了解這個單元了解的內容，而且讓微積分的內容更豐富。</li> </ol>

### (3) 教師教學反思

根據上述研究結果，可以發現運用多媒體設計原則所編寫的 GeoGebra 程式，不論應用在課堂上由教師進行示範教學，或是在課後由學生自行操作觀察，都能增進學生理解特定概念，提升微積分(一)的學習成效；不過若額外搭配學習單輔助教學，除了對適應型的學生有達到正向的顯著差異，對資電或理工領域的大部分學生而言，展現在微積分(一)的學習成效上並沒有產生顯著意義，因此在教學時間與資源有限的客觀條件之下，針對學習單進行重點式的精簡，就成為教學改善以提升教學效率的可行辦法。

### 6. 建議與省思

綜合以上結論，本研究提出下列具體建議，可作為持續進行教學精進，以及未來研究方向的參考依據：

- I. 可在課堂上運用 GeoGebra 進行示範教學，促進學生對概念的理解，並挑選少數重要特定單元提供學習單，以增進學生操作 GeoGebra 的動機與效益。
- II. 可進一步探討 GeoGebra 搭配學習單融入微積分(二)課程的教學成效，或是瞭解於商管學院的微積分課程，應用 GeoGebra 搭配學習單進行輔助教學時，修課學生所展現出的學習表現，藉以觀察此教學法對進階課程或不同背景學生所帶來的效益，以及提出對應的改善作為。

## 二. 參考文獻

- 左台益(2012)。動態幾何系統的概念工具。《中等教育》，63(4)，6-15。
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Kolb, D. A. (1984). *Experiential Learning: Experience as the source of learning and development*. New Jersey: Prentice Hall.
- Mayer, R. E. (2001). *Multimedia Learning*. New York, NY: Cambridge University Press.
- Talmon, V., & Yerushalmy, M. (2004). Understanding dynamic behavior: parent-child relations in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 57, 91-119.

三. 附件

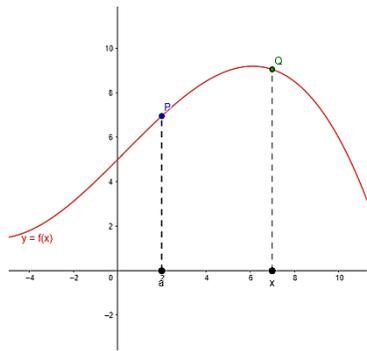
※ 玩玩微積分 GeoGebra <https://sites.google.com/site/calculusteaching/home/calculus/GGB>

Part A. 極限 (The Limit)

函數的極限 (The Limit of a Function) <https://www.geogebra.org/m/jrffzje6>

**Definition** The limit (極限) of the function  $f(x)$  is  $L$ :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  ;  $f(x) \rightarrow L$  as  $x \rightarrow a$

設定條件 1 :  $f(x) = -0.01x^3 + 0.01x^2 + x + 5$  and  $a = 2$

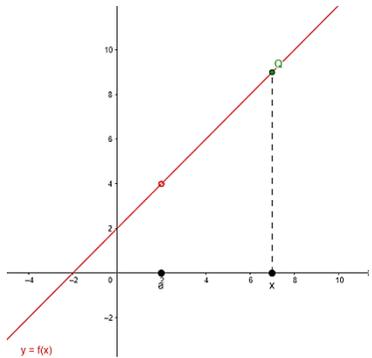


$x$	6	4	3	2.1	2.01
$f(x)$					

Solution:  $f(2) =$

and  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

設定條件 2 :  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$  and  $a = 2$



$x$	6	4	3	2.1	2.01
$f(x)$					

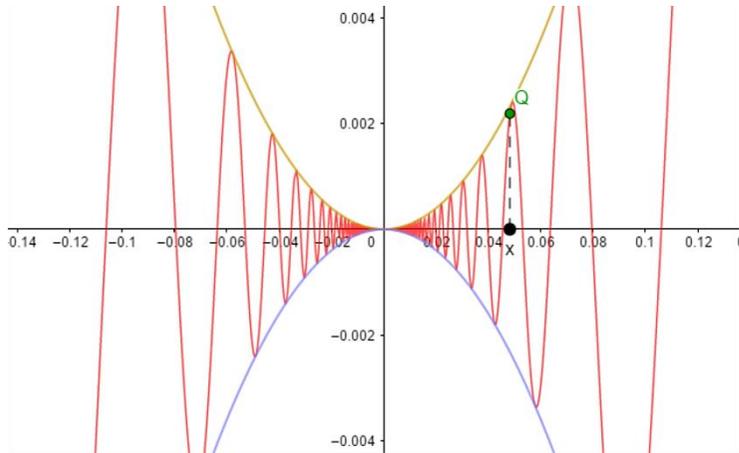
Solution:  $f(2) =$

and  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

夾擠定理 (The Squeeze Theorem) <https://www.geogebra.org/m/a2gwtxfb>

**Theorem** If  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  when  $x$  is near  $a$  and  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ , then  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ .

設定條件：  $f(x) = -x^2$ ,  $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $h(x) = x^2$  and  $a = 0$



$x$	0.5	0.2	0.1	0.05	0.01
$g(x)$					

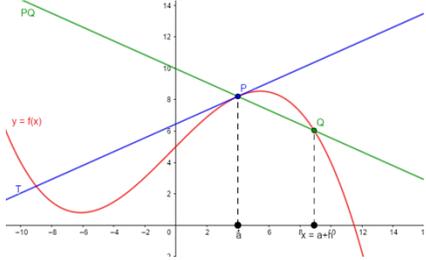
Solution:  $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$  for  $x \neq 0$  and  $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} =$

Part B. 導數 (The Derivative)

切線 (The Tangent Line) <https://www.geogebra.org/m/dzcvabh8>

**Definition** The derivative (導數) of a function  $f$  at a point  $a$  is  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .

設定條件:  $f(x) = -0.01x^3 - 0.01x^2 + x + 5$



(1)  $a = 4$

$x = 4 + h$	8	6	5	4.5	4.1
$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$					

Solution:  $m_T = f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} =$

(2)  $a = 8$

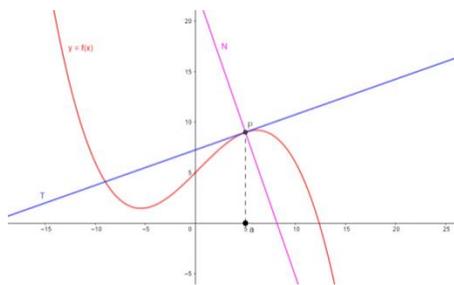
$x = 8 + h$	14	10	9	8.5	8.1
$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} = \frac{f(8+h) - f(8)}{h}$					

Solution:  $m_T = f'(8) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(8+h) - f(8)}{h} =$

法線 (The Normal Line) <https://www.geogebra.org/m/gyuvu5cf>

**Remark**  $T \perp N \Rightarrow m_T \cdot m_N = -1 \Rightarrow m_N = -\frac{1}{f'(a)} \Rightarrow \begin{cases} T : y - f(a) = f'(a)(x - a) \\ N : y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \end{cases}$

設定條件 :  $f(x) = -0.01x^3 + 0.01x^2 + x + 5$



$a$	-12	-6	0	6	12
$m_T = f'(a)$					
$m_N = -\frac{1}{f'(a)}$					

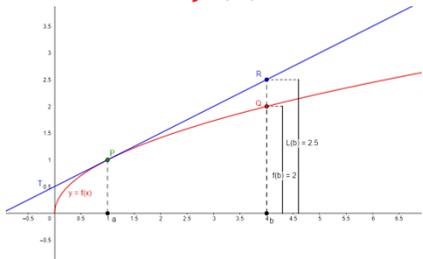
※ 玩玩微積分 GeoGebra <https://sites.google.com/site/calculusteaching/home/calculus/GGB>

Part C. 導數的應用 (Applications of the Derivative)

線性估計 (Linear Approximations) <https://www.geogebra.org/m/szbzi7rp>

**Theorem** If  $x \approx a$ , then  $f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ .

設定條件： $f(x) = \sqrt{x}$



(1)  $a = 1$

$$\sqrt{x} = f(x) \approx L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) =$$

$x$	4	3	2	1.5	1.1
$f(x)$					
$L(x)$					

(2)  $a = 4$

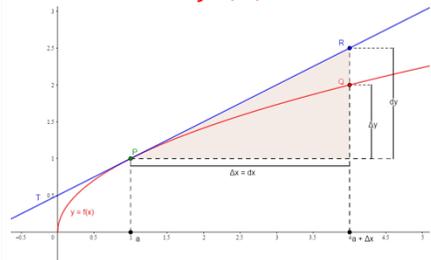
$$\sqrt{x} = f(x) \approx L(x) = f(4) + f'(4)(x - 4) =$$

$x$	10	7	5	4.5	4.1
$f(x)$					
$L(x)$					

## 微分量 (Differentials) <https://www.geogebra.org/m/qsc2dyq9>

**Theorem** If  $\Delta x \approx 0$ , then  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy = f'(x) dx$ .

設定條件：  $f(x) = \sqrt{x}$



(1)  $x = 1$

$$\Delta y = \sqrt{1 + \Delta x} - \sqrt{1} = f(1 + \Delta x) - f(1) \approx dy = f'(1) dx =$$

$\Delta x$	3	2	1	0.5	0.1
$\Delta y$					
$dy$					

(2)  $x = 4$

$$\Delta y = \sqrt{4 + \Delta x} - \sqrt{4} = f(4 + \Delta x) - f(4) \approx dy = f'(4) dx =$$

$\Delta x$	6	3	1	0.5	0.1
$\Delta y$					
$dy$					

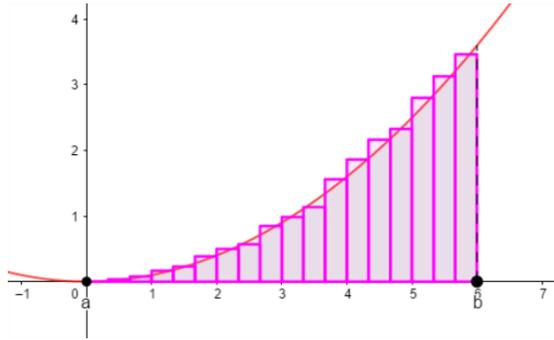
※ 玩玩微積分 GeoGebra <https://sites.google.com/site/calculusteaching/home/calculus/GGB>

Part D. 積分 (The Integral) & Part E. 積分的應用 (Applications of the Integral)

**定積分 (The Definite Integral)** <https://www.geogebra.org/m/p9kysqfp>

**Theorem** The definite integral (定積分) of  $f$  from  $a$  to  $b$  is  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$ .

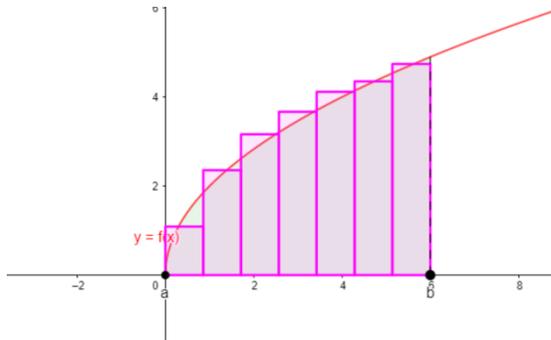
設定條件 1:  $f(x) = 0.1x^2$  and  $[a, b] = [0, 6]$ .



$n$	5	10	15	20
黎曼和				
上和				
下和				

Solution: area =  $\int_0^6 0.1x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x =$

設定條件 3:  $f(x) = 2\sqrt{x}$  and  $[a, b] = [0, 6]$ .



$n$	5	10	15	20
黎曼和				
上和				
下和				

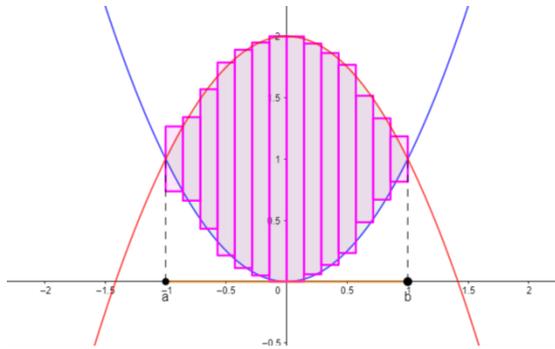
Solution: area =  $\int_0^6 2\sqrt{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x =$

曲線所圍區域的面積 (The Area between Curves) <https://www.geogebra.org/m/ge4pg4hh>

**Theorem** Suppose that  $f(x) \geq g(x)$  on  $[a, b]$ . The area of the region between  $y = f(x)$  and  $y = g(x)$  on  $[a, b]$  is  

$$\text{area} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

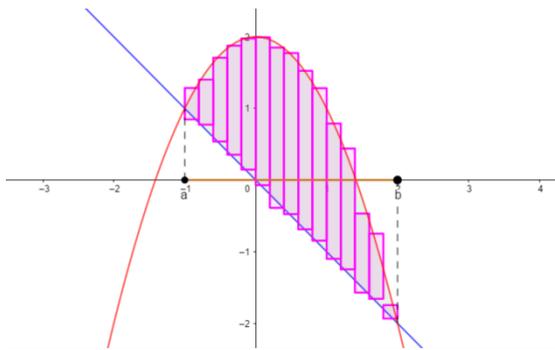
設定條件 1 :  $f(x) = -x^2 + 2$ ,  $g(x) = x^2$  and  $[a, b] = [-1, 1]$ .



$n$	10	15	20	25	30
矩形面積和					

Solution: 
$$\text{area} = \int_{-1}^1 [(-x^2 + 2) - x^2] dx =$$

設定條件 2 :  $f(x) = 2 - x^2$ ,  $g(x) = -x$  and  $[a, b] = [-1, 2]$ .



$n$	10	15	20	25	30
矩形面積和					

Solution: 
$$\text{area} = \int_{-1}^2 [(2 - x^2) - (-x)] dx =$$